

Perturbazioni e transizioni nell'universo e nella mente

Alessio Liberati

Dipartimento di Fisica, Università di Cagliari

Cos'è una perturbazione? E cos'è una catastrofe? In fisica, possiamo chiamare *perturbazione* una modificazione locale, e in genere debole, di qualcuna delle proprietà di un sistema. Ad esempio, toccando per un istante con un dito un piano che si trova a una certa temperatura, si crea una perturbazione termica locale e di breve durata, perché la temperatura del piano tornerà in breve tempo ad essere uniforme, riacquistando il suo valore iniziale. Questo è un esempio di sistema che si trova in uno stato *asintoticamente stabile*, cioè uno stato in cui le perturbazioni scompaiono in un tempo più o meno breve. Un tale stato viene detto *attrattore* e si dice che il sistema converge verso quell'attrattore.

E' altra cosa la *catastrofe*: un cambiamento repentino dello stato di un sistema che non tende a tornare alle condizioni iniziali. Dire "repentino" è come dire che "a una piccola variazione del parametro tempo corrisponde un grande cambiamento di comportamento del sistema". E infatti le catastrofi sono delle discontinuità nel comportamento di un sistema, che possono nascere in corrispondenza di piccole variazioni continue di parametri come la temperatura, la pressione, ma anche, semplicemente, la distanza: possiamo riscontrare un comportamento catastrofico anche solo spostandoci di poco nello spazio. Le parole di René Thom[1], il matematico che formulò la Teoria delle Catastrofi, chiariscono bene il concetto: "La teoria delle catastrofi ha un programma che è facile da esporre: si tratta di spiegare le forme naturali(..) Facciamo l'esempio del piano della scrivania, che è qui davanti a me: abbiamo uno spigolo che separa la superficie orizzontale della scrivania dalla parete verticale. Questo spigolo per me è un luogo di catastrofe, perché separa due superfici che hanno delle funzioni e degli orientamenti diversi(..)".

I. La teoria delle catastrofi

Per la teoria di Thom, ogni oggetto e ogni forma naturale possono essere rappresentati da un attrattore di un *sistema dinamico*. Ogni particolare forma può essere percepita solo se è stabile (cioè, come abbiamo visto, se "riassorbe" le piccole perturbazioni) e quindi se l'attrattore corrispondente è *strutturalmente stabile*. Ma le forme hanno una loro dinamica e oltre alle situazioni di stabilità esistono processi di distruzione e creazione di forme (la *morfogenesi*). Tali processi possono essere descritti con la scomparsa degli attrattori delle forme iniziali e la loro sostituzione "per cattura" da parte degli attrattori delle forme finali; cioè con un conflitto fra diversi attrattori (dice Thom "La teoria delle catastrofi, se volete, ritorna alla vecchia idea eraclitea che il conflitto è il padre di tutte le cose. Qualsiasi forma deve la sua origine ad un conflitto"). Questi sono i processi che Thom chiama *catastrofi*.

Come abbiamo visto nell'esempio della scrivania descritto da Thom, le catastrofi si verificano in corrispondenza dei punti di frontiera tra due diversi andamenti di un sistema: si tratta dei cosiddetti *punti critici degeneri*. La teoria delle catastrofi arriva a un risultato notevole: nei sistemi che dipendono da un piccolo numero di parametri (minore o uguale a 4), le catastrofi possibili sono in numero finito. Thom classifica e descrive sette *catastrofi elementari*: *la piega*, *la cuspide*, *la coda di rondine*, *la farfalla*, *l'ombelico ellittico* (il pelo), *l'ombelico iperbolico* (la cresta dell'onda), *l'ombelico parabolico* (il fungo). L'utilità di questi modelli è nella loro universalità, nella possibilità di utilizzarli per descrivere qualitativamente ogni tipo di morfogenesi: da quella delle forme biologiche, geologiche, economiche a quella delle forme psicologiche, linguistiche, etc.

II. La catastrofe in fisica

In fisica troviamo molti esempi che possono essere visti come casi di catastrofe. Intendendo la catastrofe come discontinuità di comportamento, alla maniera di Thom, possiamo vedere una catastrofe dovunque vi sia un punto o una linea di frontiera tra due regimi diversi. - Ad esempio, le linee di separazione tra fase liquida, solida e gassosa in un diagramma di fase, oppure tra magnetizzazione positiva e negativa di un materiale ferromagnetico. Oltrepassando una di queste linee si verifica una *transizione di fase*.

- Per un fluido che scorre in un condotto esiste un parametro, il *coefficiente di Reynolds*, che ha un suo valore critico (circa 2000); se il coefficiente supera quel valore, il flusso del fluido diventa turbolento.

- Altri casi sono più vicini al senso comune di catastrofe, intesa come distruzione. Le oscillazioni di un corpo elastico, ad esempio, avvicinandosi alla *frequenza di risonanza* possono raggiungere ampiezze notevoli e portare anche alla distruzione del sistema.

- La criticità auto-organizzata.

I fenomeni catastrofici possono essere visti sotto una nuova luce, quando fanno parte di un più generale processo di *auto-organizzazione*. Molti sistemi dinamici naturali - come i sistemi viventi - si trovano lontani dall'equilibrio e in continuo scambio di materia ed energia con l'ambiente circostante. Questi sistemi, chiamati da Ilya Prigogine *strutture dissipative*, possono auto-organizzarsi in uno stato critico e assumerlo come attrattore. In questa condizione di criticità, piccole perturbazioni possono determinare delle *valanghe* di varie proporzioni, all'interno di un'unica dinamica che determina sia eventi di lieve entità che eventi catastrofici. Questa dinamica è riscontrabile in molti fenomeni naturali (come i terremoti e gli uragani), in fenomeni biologici, ma anche storici ed economici,

come le fluttuazioni a cui è soggetta la borsa. In un esperimento che permette di comprendere la criticità auto-organizzata, vengono fatti cadere su un piatto, uno alla volta, dei granelli di sabbia; i granelli caduti formano un mucchietto la cui pendenza aumenta gradualmente. Ogni tanto, quando la pendenza supera un certo valore, si formano delle valanghe, la cui dimensione media aumenta man mano che si aggiunge sabbia; così alcuni granelli finiscono oltre il bordo del piatto. Il mucchietto smette di crescere, e raggiunge uno stato critico, quando la quantità di sabbia aggiunta è in media uguale a quella che cade al di fuori del piatto. Quando la pendenza del mucchietto è inferiore a quella critica, le valanghe sono più piccole di quelle che si verificano nello stato critico, permettendo così al mucchietto di raggiungere lo stato critico. Se la pendenza è superiore a quella critica, le valanghe sono più imponenti e fanno crollare il mucchietto di sabbia fino allo stato critico. In sostanza, lo stato critico è un attrattore per il sistema.

L'auto-organizzazione è considerata uno dei meccanismi attraverso i quali emerge la *complessità* in natura.

- I sistemi complessi.

Parliamo di *complessità* (dal latino *complexi* che è "unire insieme, abbracciare"; *complexio* è anche "collegamento fra atomi"; *complexus* è anche "nesso, legame tra cose") quando abbiamo a che fare con sistemi costituiti da molte componenti interconnesse, e di fronte ai quali dobbiamo rinunciare all'approccio riduzionista della fisica classica, a favore di un approccio olistico, di una visione d'insieme del comportamento del sistema. Quasi tutti i sistemi naturali sono complessi e, inoltre, hanno spesso un *comportamento non lineare*, vale a dire *caotico*. Si tratta cioè di sistemi estremamente sensibili alle condizioni iniziali: differenze anche minime delle condizioni iniziali danno luogo a evoluzioni completamente diverse e imprevedibili (il cosiddetto *effetto farfalla*, come lo chiamò Edward Lorenz in una sua conferenza dal titolo "può il battito d'ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas?"). Cause iniziali apparentemente insignificanti possono, interagendo fra loro, propagarsi e amplificarsi, provocando imprevedibili effetti catastrofici. L'effetto farfalla aggiunge quindi un altro punto di vista sulla catastrofe, oltre a quelli già visti della discontinuità e dell' "amplificazione distruttiva": quello dell'imprevedibilità.

III. La catastrofe nelle reti complesse

Una *rete* - un insieme di punti (*nodi*) collegati fra loro - è un esempio di sistema complesso per definizione, se pensiamo all'etimologia latina di cui sopra. E non a caso, con sottile pleonaso, si parla di *reti complesse*.

- La rete "democratica"

Uno dei primi modelli di rete, proposto dagli ungheresi Erdős & Rényi nel '59, è la *rete aleatoria* o "*democratica*", una rete omogenea, in cui i nodi sono indistinguibili gli uni dagli altri, perché tutti dotati dello stesso numero medio di collegamenti (detto *grado*). In reti di questo tipo esiste una *soglia critica*: se rimuovendo dei nodi dalla rete la percentuale dei nodi rimossi supera un certo valore critico, la rete viene disintegrata [2].

- La rete "artistocratica"

Risale alla fine degli anni '90 un modello che si è rivelato

molto utile nello studio delle reti esistenti in natura e nella società: una rete disomogenea, caratterizzata da pochi nodi che hanno molti collegamenti (i cosiddetti nodi *hub*) e molti nodi che ne hanno pochi. Reti di questo tipo si dicono *reti scale-free* o "aristocratiche". La struttura *scale free* è stata riscontrata in molti sistemi: da internet alla rete delle relazioni sessuali, dalla rete di interazioni tra proteine nelle cellule a quella degli eretici nel medioevo.

Anche in una rete *scale-free* possono avvenire eventi catastrofici, ma in condizioni diverse da quelle che portano alla distruzione di una rete "democratica". Le reti "aristocratiche" sono molto resistenti agli attacchi non mirati, casuali; questo perché la rimozione o la disattivazione casuale di nodi colpisce con maggiore probabilità i nodi poco connessi (che sono la maggioranza) e quindi poco rilevanti ai fini della solidità della rete. Al contrario, un attacco mirato sui nodi *hub* - ad esempio un virus informatico che colpisce gli *hub* di Internet, come Google o Yahoo - può mettere in crisi la rete e causarne la disintegrazione in gruppi isolati.

Particolarmente inquietanti sono le scoperte sui meccanismi di diffusione dei virus (non solo quelli informatici ma anche quelli delle malattie) in una rete aristocratica. Un virus come l'HIV, ad esempio, si diffonde attraverso la rete delle relazioni sessuali, la quale, come è stato dimostrato, è di tipo aristocratico: così come su internet, anche nella rete dei rapporti sessuali esistono pochi individui che hanno molti partner e molti che hanno rapporti sessuali con poche persone, o con una soltanto. Il fisico italiano Alessandro Vespignani e lo spagnolo Pastor-Satorras hanno scoperto che in una vasta gamma di reti *scale-free* la soglia critica per le infezioni ha valore zero, cioè non esiste un punto critico; non esiste una soglia epidemica, un valore limite al di sotto del quale è escluso che un virus provochi un'epidemia o l'inizio di uno stato endemico. Questo significa che nella gran parte delle reti *scale-free* le infezioni (anche da virus informatico) possono proliferare facilmente, grazie alla struttura stessa della rete e indipendentemente dal loro tasso di diffusione. Anche se si riuscisse a diffondere l'antivirus (il vaccino) al 99% dei computer (degli individui), ciò non basterebbe a debellare l'infezione, perché il virus sopravviverebbe in un piccolo numero di individui poco connessi e avrebbe sempre la possibilità di propagarsi nuovamente su tutta la rete. La strategia per contrastare la diffusione delle infezioni in una rete *scale-free* non è un'azione generalizzata su tutti i nodi della rete, ma un'azione mirata ai nodi *hub*: nel caso di un virus informatico significa proteggere gli *hub* di internet; nel caso dell'HIV vuol dire indirizzare le campagne di sensibilizzazione a quegli individui che hanno un numero di partner più elevato. Se volessimo interpretare come catastrofe la diffusione di un virus in una rete aristocratica, dovremmo inventarci la categoria della "catastrofe diffusiva", non-esplosiva (etimologicamente sarebbe sempre un "rivolgimento", una *katastrophé*, ma graduale); un fenomeno che, anche se contrastato, ha la possibilità di trasformarsi in "catastrofe latente", sempre pronta a riemergere.

IV. La catastrofe nelle reti neurali

Una *rete neurale* è una rete di neuroni artificiali che cerca di simulare, in un sistema informatico, il funzionamento dei neuroni cerebrali. E' costituita da unità di elaborazione che scambiano tra loro segnali attraverso delle connessioni, ognuna delle quali ha un *verso* ed è caratterizzata da un numero, detto *peso*, che amplifica o attenua i segnali che la percorrono.

Si può cercare di simulare i processi di memorizzazione nei neuroni biologici proprio con le reti neurali, creando modelli in cui memorizzare significa modificare i pesi delle connessioni tra i nodi della rete. Ma questo cambiamento può portare a un fenomeno definito *interferenza catastrofica*: se la rete ha un'eccessiva plasticità, i valori dei pesi vengono alterati drasticamente, cancellando ciò che si è memorizzato in precedenza. In questi casi sono necessari degli aggiustamenti al modello neurale, proprio per evitare l'interferenza catastrofica.

Anche in una rete neurale possono esistere dei valori critici oltre i quali il comportamento cambia improvvisamente, come accade nella *rete di Hopfield*, un modello usato per processi di memorizzazione. In questo modello, un "pattern" correttamente memorizzato costituisce un *attrattore* per la rete e l'apprendimento consiste nella creazione di attrattori stabili. Ma se vengono memorizzati anche poco più di $0,138N$ pattern (dove N è il numero di nodi della rete) può verificarsi una "caduta a valanga" che produce dei pattern risultanti non più riconoscibili.

In una variante del modello di Hopfield (basata su *neuroni stocastici*), è presente un parametro T che, in analogia con la fisica e la meccanica statistica, viene chiamato *temperatura*. Se il valore della temperatura supera certi valori critici, i punti di equilibrio della rete coincidono con uno dei pattern memorizzati in precedenza. Ma esiste anche un determinato valore limite per la temperatura, oltre il quale si ha un'evoluzione priva di punti di equilibrio, un' *evoluzione caotica della rete*.

[1] Tratto dall'intervista "Teoria delle catastrofi" - Parigi, Istituto di Matematica, 16 dicembre 1988

[2] Réka Albert e Albert-László Barabási, *Statistical mechanics of complex networks*, 2002

Bibliografia:

René Thom, *Stabilità strutturale e morfogenesi*, Giulio Einaudi editore, 1980

G. Nicolis e I. Prigogine, *La complessità*, Giulio Einaudi editore, 1991

Per Bak e Maya Paczusi, *Complexity, contingency, and criticality*, 1994

Romualdo Pastor-Satorras e Alessandro Vespignani, *Epidemic Spreading in Scale-Free Networks*, 2001, *Physical Review Letters*, 86(14), pp.3200-3203

Réka Albert e Albert-László Barabási, *Statistical mechanics of complex networks*, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 74, gennaio 2002

Mark Buchanan, *Nexus*, Oscar Mondadori, Milano, 2002

B. Ans, S. Rousset, R.M. French & Serban Musca, *Preventing Catastrophic Interference in Multiple-Sequence Learning Using Coupled Reverberating Elman Networks*, 2002

Dario Floreano, Claudio Mattiussi, *Manuale sulle reti neurali*, Il Mulino, 2002